SESION 5

APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA

I. CONTENIDOS:

1. Los valores de las funciones trigonométricas para ángulos de 30°, 45°, 60° y 90°.
2. Aplicaciones prácticas de la trigonometría.
3. Introducción a los vectores.

II. OBJETIVOS:

Al término de la Clase, el alumno:

- Deducirá los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$
- Comprenderá la variación del valor de las funciones trigonométricas en los diferentes cuadrantes.
- Conocerá el concepto de vector.
- Comprenderá mediante las identidades trigonométricas la relación que guardan las funciones trigonométricas.

III. PROBLEMATIZACIÓN:

Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas.

- ¿Sabías que la trigonometría tiene aplicación en campos como la navegación y el cálculo de estructuras? Ejemplifica.
- ¿Te puedes imaginar la aplicación de la trigonometría en el campo las ciencias del espacio?
- Eratóstenes (240 a.C.) un matemático griego, usando sólo sus conocimientos en trigonometría (longitudes de área y de sombra), calculó casi acertadamente la circunferencia de la tierra. ¿Cómo lo hizo?

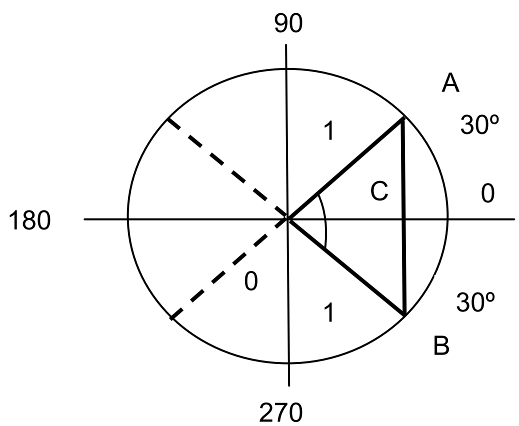
IV. TEXTO INFORMATIVO-FORMATIVO:

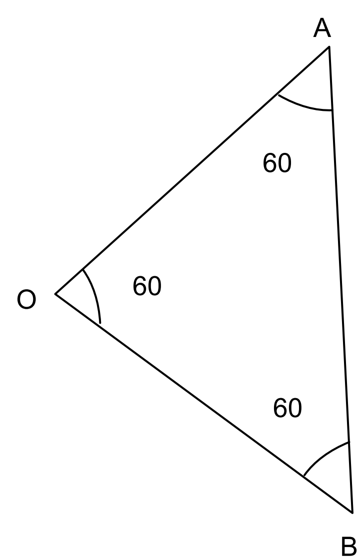
1. 1. Los valores de las funciones trigonométricas para ángulos de 30°, 45°, 60° y 90

Los valores de las funciones corresponden a las coordenadas asociadas al punto Terminal de cada ángulo sobre el círculo unitario. La coordenada "X" es el coseno y la "Y" es el seno.

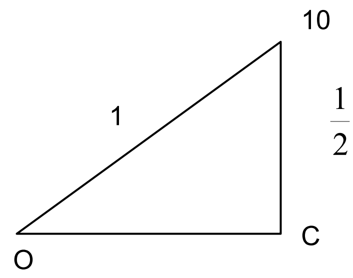
$$\frac{y}{x} = \tan \qquad \frac{x}{y} = \cot \qquad \frac{1}{x} = \sec \qquad \frac{1}{y} = \csc$$

Deducción de las coordenadas para 30, 60, 45 y 90º





Por relaciones geométricas el triángulo OAB es equilátero y el eje X es bisectriz por lo que al lado AB lo divide en dos partes iguales obteniéndose el triángulo rectángulo siguiente:



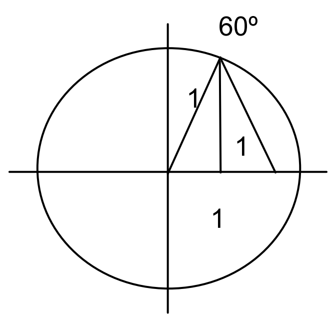
$\frac{1}{2}$ Es “Y” y con el teorema de Pitágoras se calcula el cateto X.

x = $\sqrt{(1)^2 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}$

x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

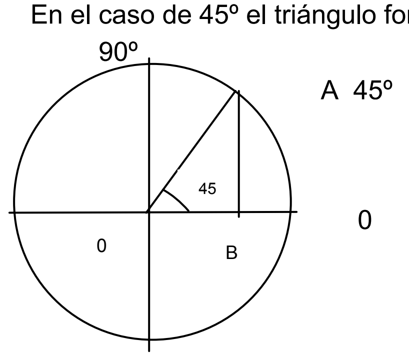
Las coordenadas de 30º son ($\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$)

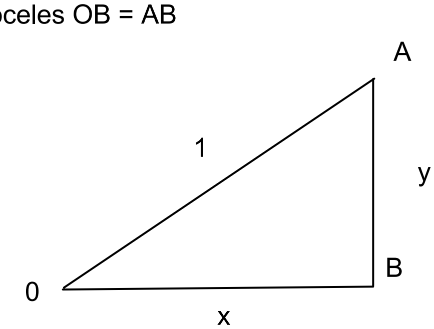
Con un razonamiento similar se pueden deducir las coordenadas para 60º



Obteniéndose 60º ($\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$)

En el caso de 45º el triángulo formado por OAB es isóceles OB = AB





Por Pitágoras $x^2 + y^2 = 1^2$ como $x = y$

$x^2 + x^2 = 1$

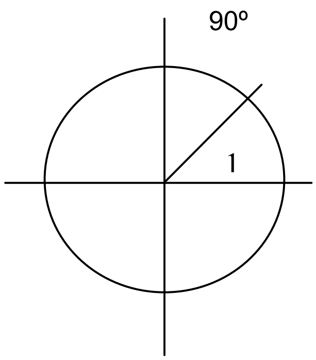
$2x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Entonces 45º tiene $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ Como coordenadas

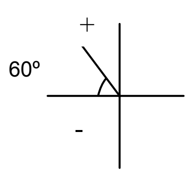
El caso del ángulo de 90º es más simple por caer el punto terminal sobre el eje x.



Entonces 90º tiene coordenadas (0,1)

Signos de las funciones: dependen del cuadrante donde se localice el punto terminal del ángulo medido a partir del *eje x en el cuadrante.*

Ejemplos:
Determinar sen, cos, y tan de un ángulo de 60º en el II cuadrante:



Coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Sen = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Cos= $-\frac{1}{2}$

$$\text{Tan} = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{Tan} = -\sqrt{3}$$

2.1. Aplicaciones prácticas de la trigonometría.

Una de las aplicaciones más importantes de las funciones trigonométricas en el análisis y resolución de situaciones en las que están involucrados triángulos.

El método a seguir requiere:

- *Comprender la situación descrita.*
- *Representarla mediante uno o más triángulos identificando los datos numéricos y la o las incógnitas.*
- *Elegir formulas de funciones o teoremas que relacionen los datos numéricos y la o las incógnitas.*
- *Aplicarlas al problema y despejar la incógnita.*

Para el caso de los triángulos rectángulos (los que tienen ángulo recto) las herramientas disponibles son:

a) El teorema de los ángulos de un triángulo:

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180^\circ$$

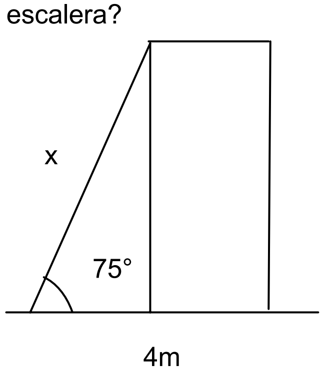
b) El teorema de Pitágoras:

$$H^2 = (\text{cateto})^2 + (\text{cateto})^2$$

c) Las funciones trigonométricas sen, cos y tan.

Ejemplo:

Una escalera forma un ángulo de 75º con el suelo, y está apoyada en su parte alta sobre el muro de un edificio. Si la base de la escalera está a 4 metros de la base del edificio, ¿cuánto mide la escalera?



Datos:

Angulo de 75º
El cateto adyacente 4 metros.
Incógnita: La hipotenusa x

Fórmula $\cos A = \frac{CA}{H}$

Aplicada $\cos 75^\circ = \frac{4}{x}$

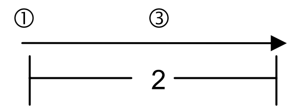
Despejando = x

$$x = \frac{4}{\cos 75} = 15.45 \text{ m}$$

3.1. Introducción a los Vectores.

Otra aplicación es el análisis de vectores Un vector es una flecha que representa a cantidades que para ser entendidas es necesario indicar de ellas:

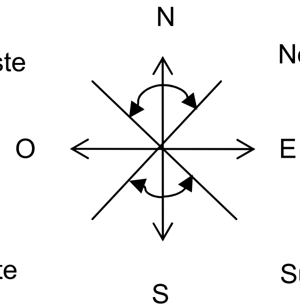
1) *Punto de aplicación o inicio.*
2) *Magnitud; tamaño del vector.*
3) *Dirección; línea sobre lo que actúa.*
4) *Sentido; punta de la flecha.*



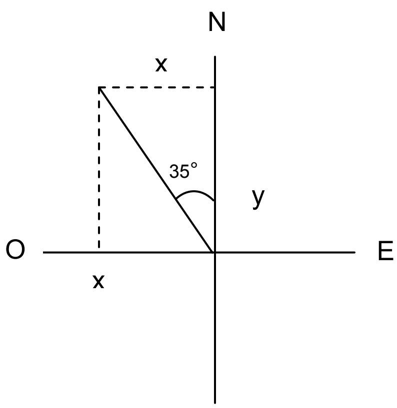
Ejemplos de estas cantidades son: las fuerzas, las velocidades, las aceleraciones… desplazamientos.

Ejemplo de aplicación: Una persona camino 500 metros en dirección 35º noroeste. ¿Cuánta distancia recorrió hacia el norte y cuanta hacia el oeste?

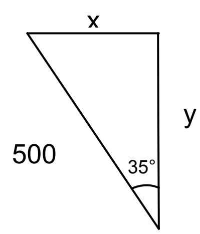
Nota: para orientaciones sobre los ejes terrestres los ángulos se miden a partir de la línea.



Análisis del problema planteado:



Aislando el triángulo formado



y= Distancia al Norte
x =Distancia al Sur

Datos: Hipotenusa = 550
Ángulo = 35º

Para calcular y (cateto adyacente a 35º)

Fórmula cos A = $\frac{CA}{H}$

Aplicando cos 35º = $\frac{y}{500}$ despejando y = 500 cos 35º

y = 409.57 m al Norte

Para calcular x (cateto opuesto)

Fórmula sen = $\frac{CD}{H}$

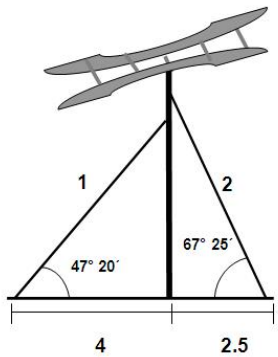
Aplicando sen 35º = $\frac{x}{500}$ Despejando x = 500 sen 35º

x = 286.78 m al Sur.

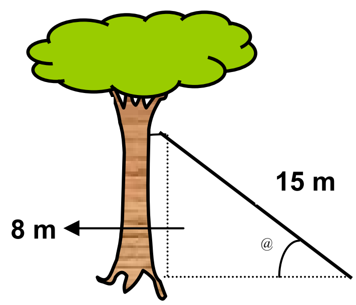
V. ESTRATEGIAS CENTRADAS EN EL APRENDIZAJE:

A. Resuelve los siguientes ejercicios.

1. Determina a qué altura del piso se encuentran los cables tensores en el lugar donde sujetan al poste de la antena.



2. Si tengo un árbol al cuál amarro una cuerda que mide 15 mts y ésta se encuentra sujeta a 8 mts por arriba del suelo; ¿Cuál es el ángulo @ que se formará entre la cuerda y el suelo?



3. Por la mañana al levantarse una zorra, miró su sombra y dijo: *"Estoy tan hambrienta que me comería un elefante"*. Suponiendo que en ese momento el sol se encontrara a 15º sobre el horizonte, y que la altura de la zorra fuera de 60 cm ¿de qué tamaño era la sombra de la zorra?

4. Un automóvil sube una cuesta cuya inclinación con la horizontal es de 25º. ¿A qué altura ha llegado después de recorrer sobre ella 2 Km?

5. Al colocar en el punto central de un cable tensado de 10 m de longitud un semáforo, éste se deformo produciendo un desplazamiento hacia abajo del punto centra de 0.05 m ¿Cuánto mide la deformación del cable?

B. Resuelve el Problema Reto.

Un observador en la cima de un montículo a 250 pies por encima de la superficie de un lago observa dos botes directamente en línea. Calcula la distancia entre los botes si los ángulos de depresión medidos por el observador son de 11° y 16° respectivamente.